Geometría I

Examen XIII

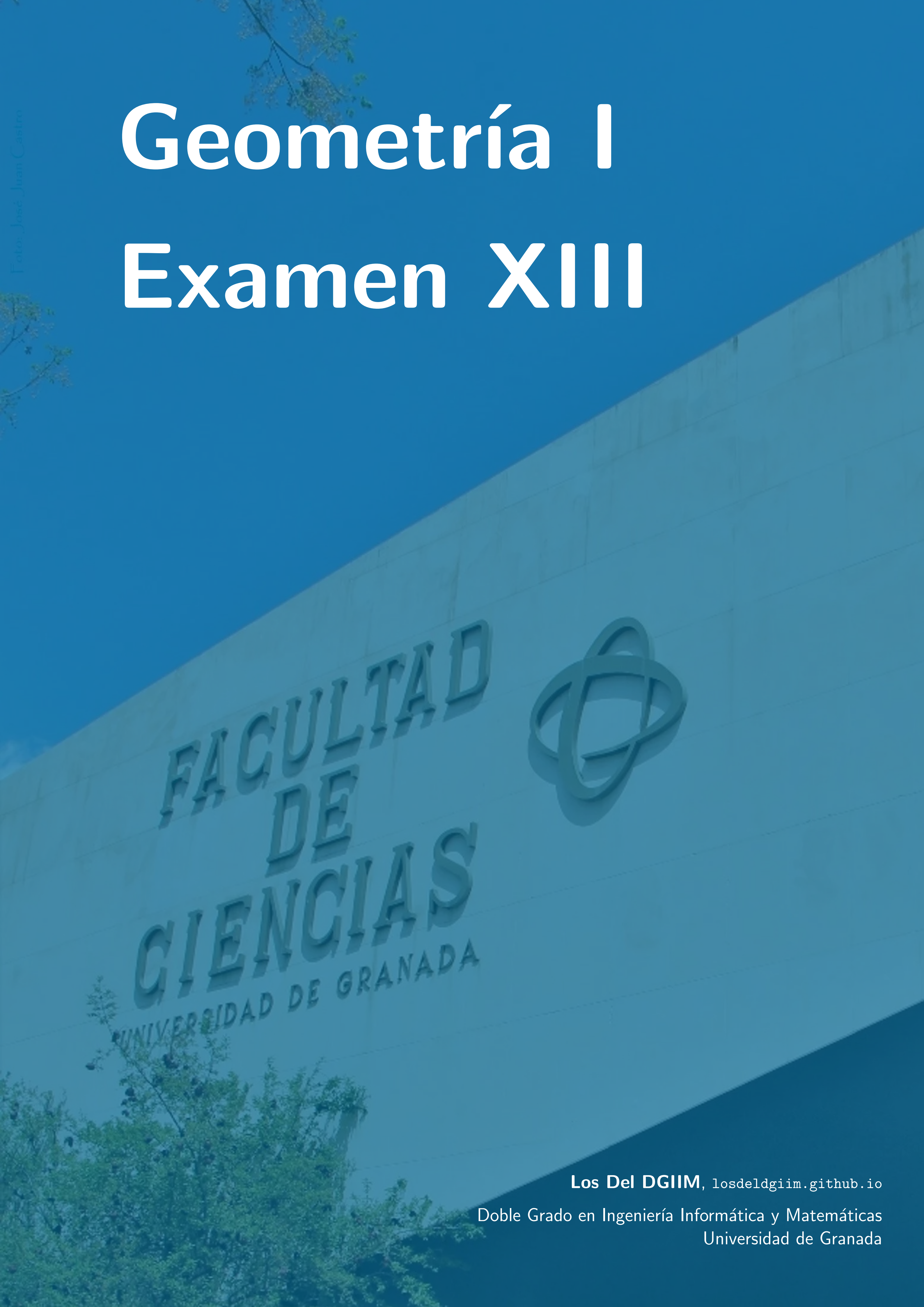

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría I
Examen XIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Víctor Naranjo Cabrera

Granada, 2021

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B

Profesor Antonio Alarcón López.

Fecha 21 de diciembre de 2021.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. f es un monomorfismo.

b. Para todo conjunto linealmente independiente $S \subset V$, se tiene que $f(S) \subset V'$ es linealmente independiente

c. Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $f(\mathcal{B})$ es un conjunto linealmente independiente en V'

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Demostrar que toda base de V tiene una única base dual en V^*

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ del que se sabe que:

$$f(1,0,2) = (-2,1,1), f(0,1,0) = (-1,1,0), \text{ y } f(0,0,1) = (-1,0,1)$$

Se pide:

a. Obtener bases del núcleo y la imagen de f. Calcular la matriz asociada a f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$, $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u)$.

b. Obtener, si es posible, bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de R^3 tales que

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar las matrices regulares, $P, Q \in Gl(3, \mathbb{R})$ tales que $C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

c. Calcular la base dual $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ obtenida en el apartado anterior.

Ejercicio 1 (3 puntos)**.** Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. f es un monomorfismo.

b. Para todo conjunto linealmente independiente $S \subset V$, se tiene que $f(S) \subset V'$ es linealmente independiente

c. Existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $f(\mathcal{B})$ es un conjunto linealmente independiente en V'

Sean V y V' espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$:

a) ⇒ b)

Sea f un monomorfismo. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ l.i $\subseteq V \Rightarrow a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n. = 0$, Sea ahora $f(S) = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ y $b_1, \ldots, b_n$, con $b_i \in \mathbb{K}$ $\forall i = 1, \ldots, n$ tal que

$$b_1f(v_1) + \ldots + b_nf(v_n) = 0 \Rightarrow f(b_1v_1 + \ldots + b_nv_n) = 0$$

Por ser inyectiva, $b_1v_1 + \ldots + b_nv_n = 0$. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ l.i $\Rightarrow b_1 = \ldots = b_n = 0 \Rightarrow f(S)$ l.i.

b) ⇒ c)

Como la dimensión de V es finita, $\exists \mathcal{B}$ base de V. Por definición, $\mathcal{B}$ es l.i $\Rightarrow f(\mathcal{B})$ es l.i.

c) ⇒ a)

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $x \in Ker(f) \mid x = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, con $a_i \in \mathbb{K}$ $\forall i = 0, \ldots, n$. Entonces:

$$0 = f(x) = a_1f(v_1)+\ldots+a_nf(v_n) = 0 \xRightarrow{f(\mathcal{B})\ l.i} a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow x = 0$$

Por tanto, $Ker(f) = \{0\} \Rightarrow f$ monomorfismo

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Demostrar que toda base de V tiene una única base dual en V^*

Sea V esp. vect. con $dim_{\mathbb{K}}(V) = n \in \mathbb{N}$. Queremos probar que $\forall \mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $V, \exists!\ \mathcal{B}^*$ base de V^*.
Como $\forall \varphi \in V^*, \varphi$ viene determinada por $\mathcal{M}(\varphi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B})$ y esta por las imágenes de cada vector de $\mathcal{B}$, entonces cada $\varphi \in V^*$ viene determinada por $\varphi(v_i)$ $\forall i = 1, \ldots, n$.
Como $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \ldots, n$, se tienen determinadas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de forma única $\Rightarrow \exists!\ \mathcal{B}^* \subseteq V^*$.

Veamos que efectivamente $\mathcal{B}^*$ forma base, demostrando para ello que $\mathcal{B}^*$ es l.i. Sean $a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n = \varphi_0 = 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$

$$\varphi_0(v_i) = 0 = a_i\varphi_i(v_i) = a_i = 0 \Rightarrow \mathcal{B}^* \text{ l.i } \Rightarrow \mathcal{B}^* \text{ es base}$$

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ del que se sabe que:

$$f(1,0,2) = (-2,1,1), f(0,1,0) = (-1,1,0), \text{ y } f(0,0,1) = (-1,0,1)$$

Se pide:

a. Obtener bases del núcleo y la imagen de f. Calcular la matriz asociada a f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$, $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u)$.

Primero calcular la matriz A. Sea $\mathcal{B}_u = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{cases} f(0,1,0) = f(e_2) = (-1,1,0) \\ f(0,0,1) = f(e_3) = (-1,0,1) \\ f(1,0,2) = f(e_1) + 2f(e_3) \Rightarrow f(e_1) = (-2,1,1) - 2(-1,0,1) = (0,1,-1) \end{cases}$$

Por tanto:

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular base de $Ker(f)$.

$$Ker(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} y = -z \\ x = -y \\ x = z \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} y = -z \\ x = z \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(1,-1,1\})$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \{(1,-1,1)\} \text{ base de } Ker(f)$$

Obtener base de $Im(f)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow rg(A) \neq 3, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Por lo que $\mathcal{B} = \{(0,-1,1), (-1,1,0)\}$ l.i y base de $Im(f)$

b. Obtener, si es posible, bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de R^3 tales que

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}' \to \mathcal{B}) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar las matrices regulares, $P, Q \in Gl(3, \mathbb{R})$ tales que $C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.
Sean $\mathcal{B} = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,-1,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(-1,0,1), (-1,1,0), (0,0,1)\}$:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0,1) = (-1,0,1) \\ f(0,0,1) = (-1,1,0) \\ f(1,-1,1) = (0,0,0) \end{array}\right. \Rightarrow M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Encontrar $P, Q \in Gl(3, \mathbb{R}) \mid C = Q^{-1} \cdot A \cdot P$
Sabemos que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}_u) \cdot \mathcal{M}(f, \mathcal{B}_u) \cdot \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}) \Rightarrow$ $C = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}') \cdot A \cdot \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})$. Por lo que:

$$Q = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \mathcal{M}(I_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Calcular la base dual $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ obtenida en el apartado anterior.
Sea $\mathcal{B}_u^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}, \varphi_i(a_1, a_2, a_3) = a_i, \forall i = 1,2,3$ y $\mathcal{B}' = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}, \psi_i \equiv (a_i, b_i, c_i)_{\mathcal{B}_u^*}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi_1 = (-1,0,1)_{\mathcal{B}_u^*}, \psi_2 = (1,1,0)_{\mathcal{B}_u^*} \psi_3 = (1,0,0)_{\mathcal{B}_u^*} \Rightarrow \mathcal{B}^* = \{-\varphi_1 + \varphi_3, \varphi_1 + \varphi_2, \varphi_1\}$$